Πεπερασμένες διαφορές για το πρόβλημα δυο σημείων

Διατύπωση του προβλήματος

Έστω πραγματικοί αριθμοί $a,\ b$ με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθι πρόβλημα δυο σημείων: αναζητάμε συνάρτηση $y\ :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x) &= f(x), \quad \forall\, x \in [a, b], \\ y(a) &= y_a \\ y(b) &= y_b, \end{aligned}$$

με $q,\ f \in C[a, b]$ δοσμένες συναρτήσεις και $q(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $y_a,\ y_b \in \mathbb{R}$ δοσμένα. Θα συμβολίζουμε με $q_{min} = \min_{x\in[a,b]} q(x)$.

Περιγραφή της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών

Έστω N φυσικός αριθμός που δίνεται από το χρήστη. Ορίζουμε το πλάτος της διαμέρισης $h := \frac{b-a}{N}$ για το διάστημα $[a, b]$. Οι αντίστοιχοι κόμβοι ορίζονται ως εξής: $x_j = a + jh$, για $j = 0, \dots, N$. Συμβολίζουμε με y^j την προσέγγιση της $y(x_j)$ για $j = 0, \dots, N$. Κατασκευάζουμε προσεγγίσεις y^j οι οποίες θα ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες, συνεπώς θέτουμε $y^0 := y_a$ και $y^N = y_b$.

Για να προσεγγίσουμε την $y''(x)$ στα σημεία $x_j,\ j = 1, \dots, N-1$, χρησιμοποιούμε την κεντρική διαφορά για την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου, την $\delta^c_{h,2}$.

Συνεπώς, οι προσεγγίσεις προσδιορίζονται ως λύση του γραμμικού συστήματος που προκύπτει από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} -\frac{y^{j-1} - 2y^j + y^{j+1}}{h^2} + q(x_j)y^j &= f(x_j), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ y^0 &= y_a, \\ y^N &= y_b. \end{aligned}$$

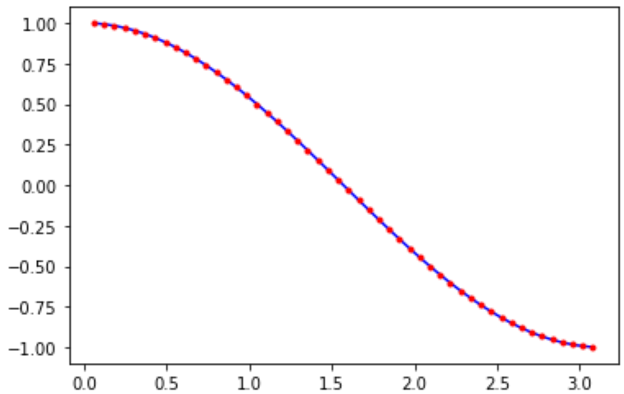
Άσκηση 1: Αν συμβολίσουμε με $Y \in \mathbb{R}^{N-1}$ το διάνυσμα με συνιστώσες $y^1, \dots, y^{N-1}$, δηλαδή $Y = (y^1, \dots, y^{N-1})^T$, βρείτε το γραμμικό σύστημα που ορίζουν οι παραπάνω εξισώσεις και βεβαιωθείτε οτι έχει μοναδική λύση. Παρατηρήστε ότι ο πίνακας είναι τριδιαγώνιος.

Άσκηση 2: Έστω $y(x) = \cos(x)$ λύση του προβλήματος

$$-y''(x) + y(x) = 2\cos(x), \quad \forall\, x \in [0, \pi],$$
$$y(0) = 1$$
$$y(\pi) = -1,$$

Θεωρήστε $N = 50$ και κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνει η παραπάνω μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών και κατασκευάστε το γράφημα της προσεγγιστικής μαζί με την ακριβή λύση.

In [3]:



Πειραματική τάξη σύγκλισης

Γνωρίζουμε ότι αν $y \in C^4[a, b]$, τότε το σφάμλα της παραπάνω μεθόδου πεπερασμένων διαφορών ικανοποιεί την

$$\max_{0 \le i \le N} |y^i - y(x_i)| \le Ch^2.$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα

$$\mathcal{E}(N) = \max_{0 \le i \le N} |y^i - y(x_i)|,$$

για δυο διαφορετικές διαμερίσεις με $N_1 < N_2$, η πειραματική τάξη σύγκλισης ορίζεται ως

$$p = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(N_2)}{\mathcal{E}(N_1)}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}$$

Άσκηση 3: Θεωρήστε το διάνυσμα $N = [100, 200, 400]$, υπολογίστε τα σφάλματα $\mathcal{E}(N)$ και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών.

In [4]:

```
The error is : [1.38657129e-05 3.46729230e-06 8.66825781e-07]
```